

Lista 4 (poziom rozszerzony)

Zad. 1 (2 pkt.) Wiadomo, że liczby całkowite a, b spełniają równość $2a^2 + a = 3b^2 + b$. Wykaż, że jeśli 5 dzieli liczbę $a-b$, to 25 też dzieli $a-b$.

Zad. 2 (2 pkt.) Rozpatrzmy liczby naturalne $x = 11\dots111$ większe od 1000, których zapis dziesiętny zawiera tylko cyfrę 1. Wykaż, że jeżeli liczba x zapisana za pomocą n jedynek jest pierwsza, to liczba n również jest pierwsza.

Zad. 3 (3 pkt.) Oblicz $\log_8 3^{3\log_3 2 - \log_{27} 8 - \log_9 4}$.

Zad. 4 (3 pkt.) Wykaż, że liczba $(\sqrt{5} + 2)^{2022} + (\sqrt{5} - 2)^{2022}$ jest wymierna.

Zad. 5 (3 pkt.) Rozwiąż nierówność $2x^2 + x|2x-1| \leq 3$.

Zad. 6 (4 pkt.) Jedna z liczb a, b, c jest wielokrotnością liczby 7, a liczby a, b, c są kolejnymi wyrazami ciągu arytmetycznego o różnicy 7. Wykaż, że 2058 jest dzielnikiem $a \cdot b \cdot c$.

Zad. 7 (4 pkt.) Naszkicuj wykres funkcji $f(x) = |x^2 - 9| / (3 - x)$. Dla jakich wartości parametru m równanie $f(x) = m$ nie ma rozwiązania?

Zad. 8 (5 pkt.) Rozwiąż równanie $\cos^2 x - \frac{2\sqrt{3}}{3} \sin x \cos x - \sin^2 x = 0$ w przedziale $[-\pi, \pi]$.

Zad. 9 (6 pkt.) Oblicz pole czworokąta $ABCD$ wpisanego w okrąg, gdzie $|AB|=10$, $|CD|=6$ oraz $|BC|=|BD|$ wiedząc, że styczna do okręgu w punkcie C tworzy z bokiem CD kąt równy 30° .

Zad. 10 (6 pkt.) Kasia chce zrobić pudełko bez wieczka w kształcie prostopadłościanu mając do dyspozycji prostokątny kawałek kartonu o wymiarach $10 \text{ cm} \times 16 \text{ cm}$ i odcinając z każdego rogu kwadrat o boku $x \text{ cm}$. Oblicz wartość x , dla której objętość otrzymanego pudełka będzie jak największa. Ile wynosi ta największa objętość?